

4. DENEY

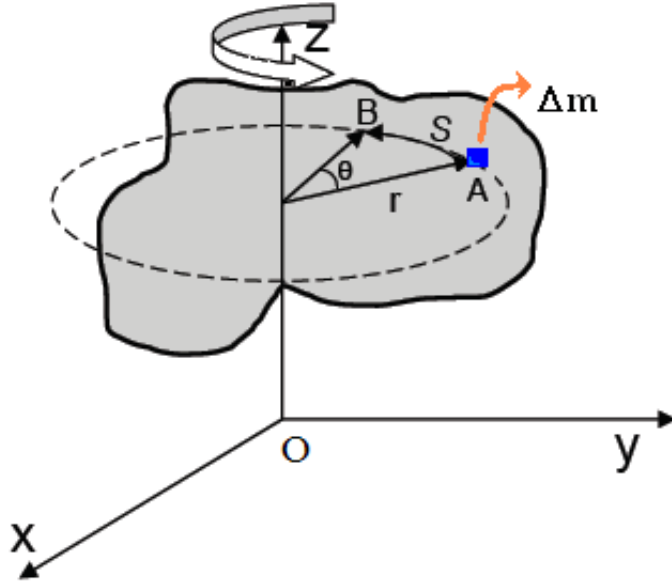
EYLEMSİZLİK MOMENTİ

Amaç: Sabit bir eksen etrafında dönen katı cisimlerin eylemsizlik momentlerini ölçmek.

Araç ve Gereçler: Kronometre (zaman ölçer), kumpas, cetvel, disk, halka, levha, kütleler.

1. Bilgi

Eylemsizlik momenti dönme hareketi yapan cisimlere ilişkin bir fiziksel özelliktir. Eylemsizlik kütlesi nasıl bir cismin çizgisel hızındaki değişmeye karşı gösterdiği direncin bir ölçüsü ise eylemsizlik momenti de bir cismin açısal hızındaki değişmeye karşı gösterdiği direncin bir ölçüsüdür. Eylemsizlik momenti büyük olan cisimlerin açısal momentumunu değiştirmek için daha büyük bir tork gerekir.



Şekil 1: z eksenini etrafında dönme hareketi yapan katı bir cisim.

Dönme Hareketi: Katı cismin zamana göre sabit bir eksen etrafında dönme hareketinin kinematiği çizgisel hareket eden bir parçacığın hareketinin kinematiğine benzer. Şekil 1 de, eylemsiz bir koordinat sisteminin z -ekseni etrafında dönen bir katı cisim verilmiştir. Bu cismin, her birinin kütlesi Δm olan çok sayıda parçacıktan oluştuğunu varsayalım. Dönme

ekseninden r kadar uzakta A noktasında bulunan Δm kütesinin açısal konumunu θ açısı ile gösterelim. Dönme sırasında bir Δt süresi içinde açısal konum $\Delta\theta$ kadar değişirse parçacık $\Delta s = r\Delta\theta$ kadar yol alır. Parçacığın çizgisel hızının şiddeti

$$v = \frac{dS}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \quad (1)$$

olarak verilir. (1) bağıntısındaki açının zamanla değişme hızına açısal hız denir ve

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (2)$$

şeklinde ifade edilir. Birimi rad/s'dir. Buna göre (1) bağıntısı

$$v = r\omega \quad (3)$$

olarak yazılabilir. Katı cismi meydana getiren bütün parçacıkların açısal hızı aynı çizgisel hızları farklıdır.

Açısal İvme: Açısal hızın zamanla değişme hızına açısal ivme denir ve

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad (4)$$

olarak verilir. Birimi rad/s'dir. (3) bağıntısından türev alınarak çizgisel (teğetsel) ivme

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} \quad (5)$$

olarak elde edilir. Buna göre, dönen cismin açısal ivmesi ile a_t teğetsel ivmesi arasında

$$a_t = r\alpha \quad (6)$$

bağıntısı vardır.

Dönme Kinetik Enerjisi: Sabit ω açısal hızıyla dönen bir katı cismin her parçacığının kütesine ve hızına bağlı bir kinetik enerjisi vardır. i.parçacığın kütlesi M_i ve hızı v_i ise kinetik enerjisi

$$K_i = \frac{1}{2}M_i v_i^2 = \frac{1}{2}M_i r_i^2 \omega^2 \quad (7)$$

dir. Cismin toplam kinetik enerjisi Denklem (7)'de verilen kinetik enerjilerin toplamı olacaktır:

$$K = \sum K_i = \frac{1}{2} \sum M_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum M_i r_i^2 \right) \omega^2 \quad (8)$$

burada ω^2 her parçacık için aynı olduğundan parantez dışına alınır.

Eylemsizlik Momenti: Denklem (8)'deki parantez içindeki nicelik, dönme eksenine göre eylemsizlik momenti olarak tanımlanır:

$$I = \sum M_i r_i^2 \quad (9)$$

Eylemsizlik momenti I sembolü ile gösterilir ve birimi $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ dir. Cisim sürekli yapıya sahip ise Denklem (9)

$$I = \int r^2 dm \quad (10)$$

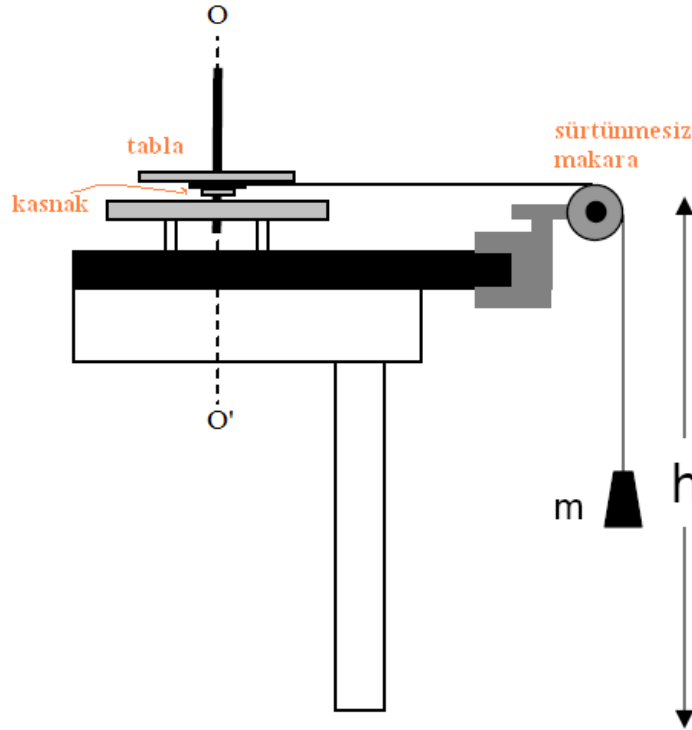
şekline dönüşür. Bu durumda bir eksen etrafında dönmekte olan bir cismin toplam kinetik enerjisi

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (11)$$

ifadesi ile verilir.

Enerji Korunumu Kullanılarak Eylemsizlik Momenti Hesabı:

Şekil 2’de şematik olarak gösterilen sistem, düşey bir eksen etrafında dönebilen disk şeklinde bir tabla ile h yüksekliği boyunca düşen bir m kütesinden oluşmuştur. m kütesinin ağırlığı r yarıçaplı bir kasnağa sarılı olan ipi çekerek, tablayı döndürür.



Şekil 2: Deney Düzenekinin Şematik Gösterimi.

Başlangıçta sadece potansiyel enerjisi olan m kütesi bu enerjiyi kendi hızlanması (v) ve ipin sarılı olduğu diski döndürmesi (ω) suretiyle kinetik enerjiye dönüştürecek. Sistem durgun halden harekete başlarsa $v_0 = 0$ ve $\omega_0 = 0$ olacağından, başlangıçta sistemin kinetik enerjisi sıfırdır. Sistemin enerjisi, m kütesinin potansiyel enerjisi olan mgh kadardır. m kütesi h kadar alçalınca, başlangıçta sadece mgh kadar potansiyel enerjisi olan m kütesi,

bu enerjiyi kendi hızlanması (v_1) ve ipin sarılı olduğu disk şeklindeki tablanın dönmesinden (ω) kaynaklanan kinetik enerjilere dönüştürecekler. Bu durum enerji korunumuna göre,

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (12)$$

şeklinde olmalıdır.

İpin sarıldığı kasnağın yarıçapı ise diskin dönme açısal hızı (ω) ile m kütlelerinin aşağıya iniş hızı arasında

$$v = r\omega \quad (13)$$

bağıntısı vardır. Sistem sabit bir kuvvetin etkisiyle (yer çekimi kuvveti) hareket ettiğine göre m kütlesi düzgün hızlanan doğrusal bir hareket yapar. Dolayısıyla,

$$v = \frac{2h}{t} \quad (14)$$

yazılabilir. (12), (13), (14) bağıntılarından yararlanarak

$$I = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \quad (15)$$

şeklinde bulunur.

2.Deney:

Deney düzeneğindeki ipin sarılı olduğu kasnağın yarıçapı ölçülür ve tabloya işlenir. 30 gramlık kütlelerin bırakılacağı h yüksekliği 75 cm olarak ayarlanır. Kütlelerin bu yükseklikten aşağıya iniş süresi 3 kez ölçülerek ortalama süre hesaplanır. Denklem (15) kullanılarak tablanın (I_{Tabla}) eylemsizlik momenti hesaplanır.

Tablo 1

r_{kasnak} (m)	h (m)	m (kg)	t_1 (s)	t_2 (s)	t_3 (s)

$t_{\text{ort}}(\text{s})$	$I_{\text{Tabla}}(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$

Disk:

Deney düzeneğindeki tablanın üzerine disk yerleştirilir. 30 gramlık kütlelerin bırakılacağı h yüksekliği 75 cm olarak ayarlanır. Kütlelerin bu yükseklikten aşağıya iniş süresi 3 kez ölçülerek ortalama süre hesaplanır. Denklem (15) kullanılarak tabla ve diskin toplam eylemsizlik momenti ($I_{\text{Tabla}} + I_{\text{Disk}}$) hesaplanır. Toplam eylemsizlik momentinden ($I_{\text{Tabla}} + I_{\text{Disk}}$), tablanın

eylemsizlik momenti (I_{Tabla}) çıkarılarak, diskin eylemsizlik momenti (I_{Disk}) hesaplanır. Denklem (16) kullanılarak diskin teorik eylemsizlik momenti ($I_{\text{Disk Teorik}}$) hesaplanır ve hata hesabı yapılır.

$$I_{\text{Disk Teorik}} = \frac{1}{2}MR^2 \quad (16)$$

Tablo 2

r_{kasnak} (m)	h (m)	m (kg)	t₁ (s)	t₂ (s)	t₃ (s)

t_{ort} (s)	$I_{\text{Tabla}} + I_{\text{Disk}}$ (kg·m ²)	$I_{\text{Disk Deney}}$ (kg·m ²)	M_{Disk} (kg)	R_{Disk} (m)	$I_{\text{Disk Teorik}}$ (kg·m ²)	B. Hata (%)

Halka:

Deney düzeneğindeki tablanın üzerine halka yerleştirilir. 30 gramlık kütlenin bırakılacağı h yüksekliği 75 cm olarak ayarlanır. Kütlenin bu yükseklikten aşağıya iniş süresi 3 kez ölçülerek ortalama süre hesaplanır. Denklem (15) kullanılarak tabla ve halkanın toplam eylemsizlik momenti ($I_{\text{Tabla}} + I_{\text{Halka}}$) hesaplanır. Toplam eylemsizlik momentinden ($I_{\text{Tabla}} + I_{\text{Halka}}$), tablanın eylemsizlik momenti (I_{tabla}) çıkarılarak, halkanın eylemsizlik momenti (I_{Halka}) hesaplanır. Halkanın iç yarıçapı $R_{iç}$ ve dış yarıçapı $R_{dış}$ olmak üzere denklem (17) kullanılarak halkanın ($I_{\text{Halka Teorik}}$) teorik eylemsizlik momenti hesaplanır ve hata hesabı yapılır.

$$I_{\text{Halka Teorik}} = \frac{1}{2}M(R_{iç}^2 + R_{dış}^2). \quad (17)$$

Tablo 3

r_{kasnak} (m)	h (m)	m (kg)	t₁ (s)	t₂ (s)	t₃ (s)

t_{ort} (s)	$I_{\text{Tabla}} + I_{\text{Halka}}$ (kg·m ²)	$I_{\text{Halka Deney}}$ (kg·m ²)	M_{Halka} (kg)	R_{iç} (m)	R_{dış} (m)	$I_{\text{Halka Teorik}}$ (kg·m ²)	B. Hata (%)

Levha:

Deney düzenegindeki tablanın üzerine levha yerleştirilir. 30 gramlık kütlenin bırakılacağı h yüksekliği 75 cm olarak ayarlanır. Kütlenin bu yükseklikten aşağıya iniş süresi 3 kez ölçülerek ortalama süre hesaplanır. Denklem (15) kullanılarak tabla ve levhanın toplam eylemsizlik momenti ($I_{\text{Tabla}} + I_{\text{Levha}}$) hesaplanır. Toplam eylemsizlik momentinden ($I_{\text{tabla}} + I_{\text{Levha}}$), tablanın eylemsizlik momenti (I_{Tabla}) çıkarılarak, levhanın eylemsizlik momenti (I_{Levha}) hesaplanır. Levhanın kısa kenarı a ve uzun kenarı b olmak üzere denklem (18) kullanılarak levhanın teorik eylemsizlik momenti ($I_{\text{Levha}}^{\text{Teorik}}$) hesaplanır ve hata hesabı yapılır.

$$I_{\text{Levha}}^{\text{Teorik}} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) . \quad (18)$$

Tablo 4

r_{kasnak} (m)	h (m)	m (kg)	t₁ (s)	t₂ (s)	t₃ (s)

t_{ort} (s)	$I_{\text{Tabla}} + I_{\text{Levha}}$ (kg · m ²)	$I_{\text{Levha}}^{\text{Deney}}$ (kg · m ²)	M_{Levha} (kg)	a (m)	b (m)	$I_{\text{Levha}}^{\text{Teorik}}$ (kg · m ²)	B.Hata (%)