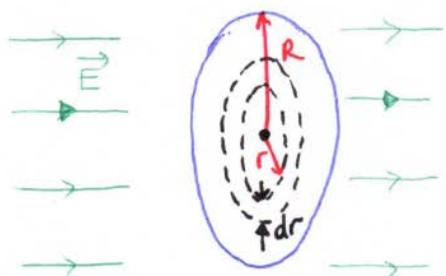
2014/2 MÜHENDİSLİK BÖLÜMLERİ FİZİK 2

UYGULAMA 2

(Gauss Yasası)

1. Yönü sabit olan bir elektrik alan, yarıçapı **R** olan bir daire düzlemine diktir. Dairenin merkezinden **r** kadar uzaklıkta elektrik alanın şiddeti $E_0\left[1-\frac{r}{R}\right]$ ile veriliyor. **R** yarıçaplı daireden geçen elektrik akısını bulunuz.



$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA = E_0\left(1-\frac{r}{R}\right)2\pi r\,dr$$

$$\Phi = \int E\,dA = \int E_0\left(1-\frac{r}{R}\right)2\pi r\,dr$$

$$\Phi = E_0\,2\pi\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)r\,dr$$

$$\Phi = E_0\,2\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3R}\right)\Bigg|_0^R$$

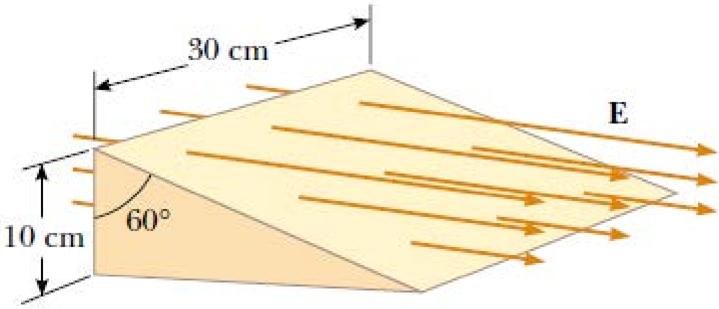
$$\Phi = \pi E_0\frac{R^2}{3}$$

2. **Şekil 1**'deki kapalı üçgen kutu **E=7,80x10^4 (N/C)** büyüklüğündeki yatay elektrik alanında bulunmaktadır. Kutunun

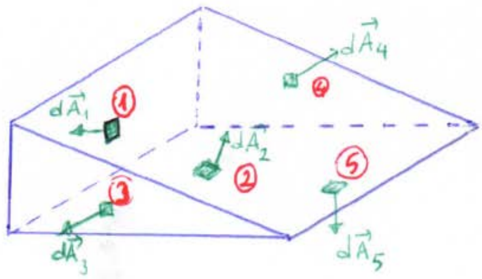
a) düşey yüzeyinden,

b) eğik yüzeyinden,

c) tüm yüzeylerinden, geçen elektrik akısını hesaplayınız.

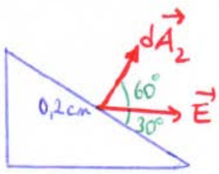


Şekil 1



a) $\Phi_1 = EA_1\cos\theta_1 = 7{,}8\cdot10^4\,(0{,}1\cdot0{,}3)\cos180^\circ = -2{,}34\ Nm^2/C$

b)



$\Phi_2 = EA_2\cos60^\circ = 7{,}8\cdot10^4\,(0{,}2\cdot0{,}3)\cos60^\circ$

$\Phi_2 = 2{,}34\ Nm^2/C$

c) Kutunun taban 5, ön 3 ve arka 4 yüzeylerinden geçen akı değerleri sıfırdır. Çünkü bu yüzeylerde, elektrik alan vektörü yüzey vektörüne diktir.

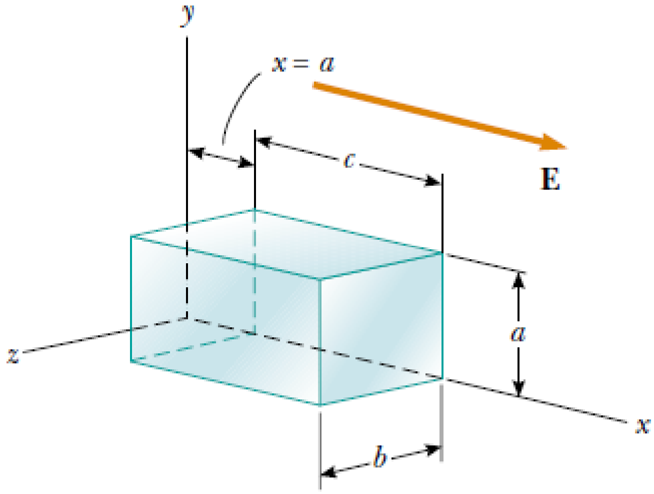
$\Phi_{net} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5$

$\Phi_{net} = -2{,}34 + 2{,}34 = 0\ Nm^2/C$ olur.

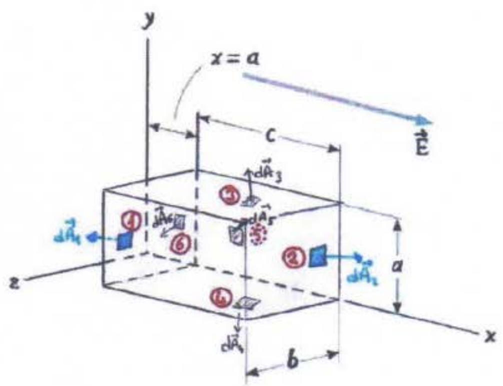
3. Boyutları **a=0,2 m**, **b=0,3** m ve **c=0,3 m** olan kapalı bir yüzey **Şekil 2**'deki gibi yerleştirilmiştir. Bölgedeki elektrik alanı düzgün olmayıp, **x** metre ile verilmek üzere; $E=(1+x^2)$ (N/C) ile verilmiştir.

a) Kapalı yüzeyden geçen net elektrik akısını,

b) Kapalı yüzey içinde kalan net yük miktarını hesaplayınız.



Şekil 2



a) $\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$

$$\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6$$

$$\Phi_3 = \int_3 \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_3 E\,dA\cos 90^\circ = 0$$

Benzer şekilde;

$$\Phi_4 = \Phi_5 = \Phi_6 = 0$$

$$\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\vec{E}_1 = (1+x^2)\,\hat{\imath}\,\Big|_{x=a} = (1+a^2)\,\hat{\imath} \quad (N/C)$$

$$\vec{E}_2 = (1+x^2)\,\hat{\imath}\,\Big|_{x=a+c} = \left[1+(a+c)^2\right]\hat{\imath} \quad (N/C)$$

$$\Phi_E = \int_1 \vec{E}_1\cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E}_2\cdot d\vec{A}_2$$

$$\Phi_E = \int_1 (1+a^2)\,\hat{\imath}\cdot dA_1(-\hat{\imath}) + \int_2 \left[1+(a+c)^2\right]\hat{\imath}\cdot dA_2\,\hat{\imath}$$

$$\Phi_E = -(1+a^2)\int_1 dA_1 + \left[1+(a+c)^2\right]\int_2 dA_2$$

$$\Phi_E = -(1+a^2)\,ab + \left[1+(a+c)^2\right]ab$$

$$\Phi_E = -ab - a^3b + ab + a^3b + 2a^3bc + abc = abc\,(2a+c)$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 0{,}2\,m \\ b = 0{,}3\,m \\ c = 0{,}3\,m \end{array}\right\} \quad \Phi_E = 12{,}6 \cdot 10^{-3}\ Nm^2/C$$

b) $\Phi_E = \dfrac{q_{net}}{\epsilon_0} \Rightarrow q_{net} = \epsilon_0\,\Phi_E$ $\qquad \epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$

$$q_{net} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 12{,}6 \cdot 10^{-3}$$

$$q_{net} = 1{,}12 \cdot 10^{-13}\ C$$

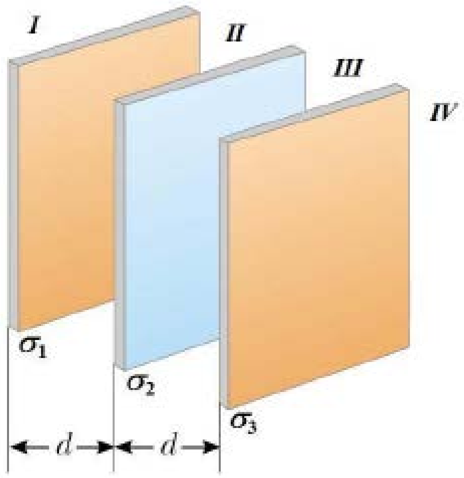
4. Çok geniş üç yalıtkan levha birbirlerinden eşit aralıklarla **Şekil 3**'deki gibi yerleştirilmiştir. Levhalar $\sigma_1 = +5(\mu C/m^2)$, $\sigma_2 = -10(\mu C/m^2)$, $\sigma_3 = +15(\mu C/m^2)$ yük yoğunluklarına sahiptir. Elektrik alan vektörünü;

a) I bölgesinde,

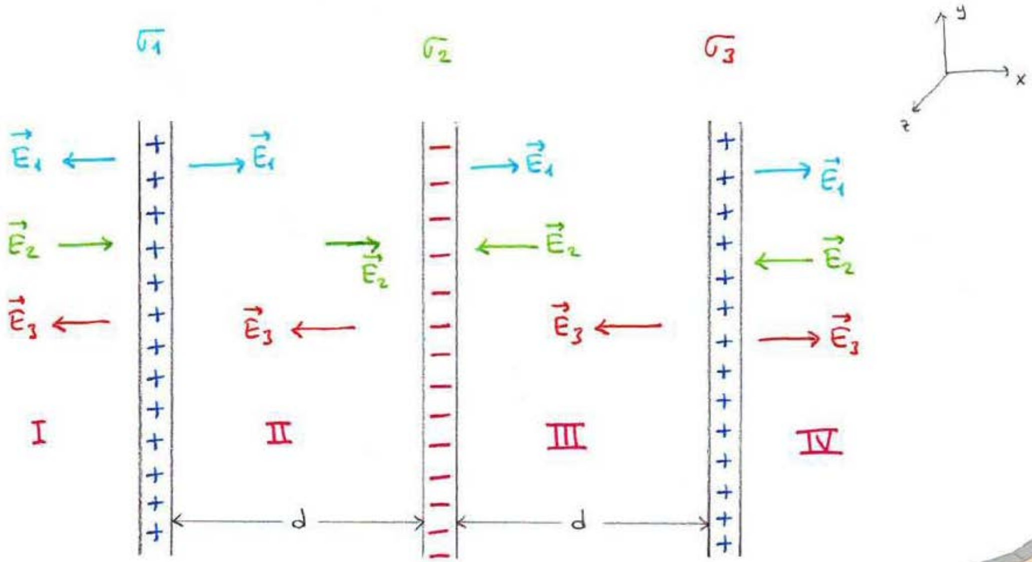
b) II bölgesinde,

c) III bölgesinde,

d) IV bölgesinde bulunuz.



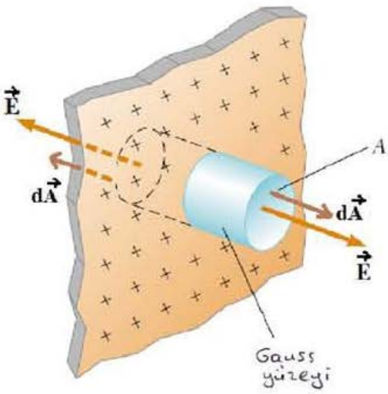
Şekil 3



$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \qquad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \qquad E_3 = \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{5.10^{-6}}{2.8{,}85.10^{-12}} \qquad E_2 = \frac{10.10^{-6}}{2.8{,}85.10^{-12}} \qquad E_3 = \frac{15.10^{-6}}{2.8{,}85.10^{-12}}$$

$$E_1 = 2{,}82.10^{5}\,(N/C) \qquad E_2 = 5{,}65.10^{5}\,(N/C) \qquad E_3 = 8{,}47.10^{5}\,(N/C)$$



I bölgesinde; $\vec{E}_I = E_1(-\hat{i}) + E_2(\hat{i}) + E_3(-\hat{i})$

$$\vec{E}_I = (-2{,}82 + 5{,}65 - 8{,}47).10^{5}\,\hat{i}$$

$$\boxed{\vec{E}_I = 5{,}64.10^{5}(-\hat{i})(N/C)}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

II bölgesinde; $\vec{E}_{II} = E_1(\hat{i}) + E_2(\hat{i}) + E_3(-\hat{i})$

$$\vec{E}_{II} = (2{,}82 + 5{,}65 - 8{,}47) \cdot 10^5 \, \hat{i}$$

$$\boxed{\vec{E}_{II} = 0}$$

III bölgesinde; $\vec{E}_{III} = E_1(\hat{i}) + E_2(-\hat{i}) + E_3(-\hat{i})$

$$\vec{E}_{III} = (2{,}82 - 5{,}65 - 8{,}47) \cdot 10^5 \, \hat{i}$$

$$\boxed{\vec{E}_{III} = 11{,}30 \cdot 10^5 \, (-\hat{i}) \; (N/C)}$$

IV bölgesinde; $\vec{E}_{IV} = E_1(\hat{i}) + E_2(-\hat{i}) + E_3(\hat{i})$

$$\vec{E}_{IV} = (2{,}82 - 5{,}65 + 8{,}47) \cdot 10^5 \, \hat{i}$$

$$\boxed{\vec{E}_{IV} = 5{,}64 \cdot 10^5 \, (\hat{i}) \; (N/C)}$$

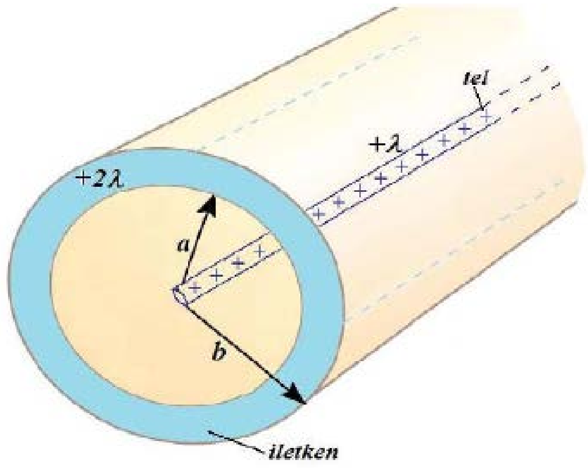
5. Birim uzunluk başına yükü **+λ** olan uzun bir tel, iç yarıçapı **a** ve dış yarıçapı **b** olan silindirik bir kabuğun ekseni boyunca **Şekil 4**'deki gibi yerleştirilmiştir. Silindirik kabuk iletken olup birim uzunluk başına yükü **+2λ**'dır. Elektrostatik dengede;

a) r<a 'da,

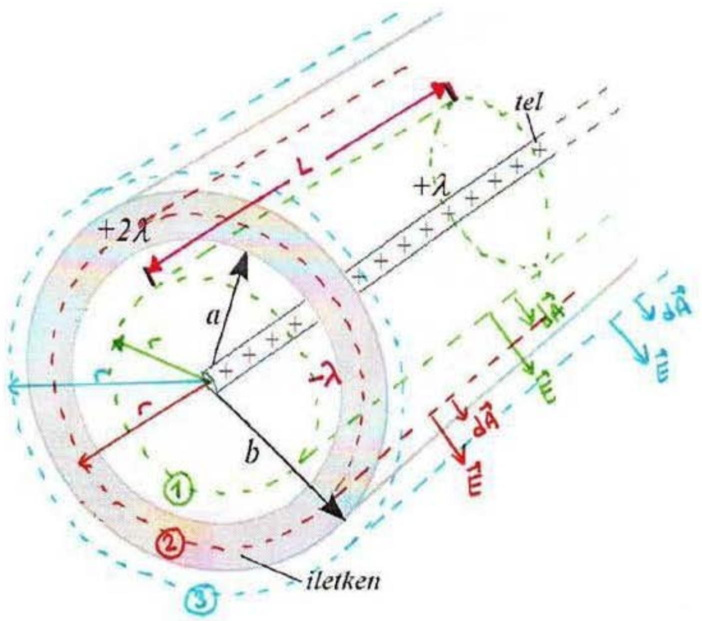
b) a<r<b 'de,

c) r>b 'de elektrik alanın şiddetini hesaplayınız.

d) Silindirik kabuğun yük dağılımını bulunuz.



Şekil 4



$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$$

a) $q_{iç} = \lambda L$

$$E(2\pi r L) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

$$\boxed{E = 2k\frac{\lambda}{r}} \quad r<a$$

b) İletken içinde $E=0$

$$\boxed{E=0} \quad a<r<b$$

c) $E(2\pi r L) = \dfrac{\lambda L + 2\lambda L}{\epsilon_0}$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\,\frac{3\lambda}{r}$$

$$\boxed{E = 6k\,\frac{\lambda}{r}} \quad r > b$$

d) $q_{iç} = -\lambda L$

(Telin, silindirik kabuğun iç yüzeyini indüklemesinden dolayı)

$$q_{silindir} = q_{iç} + q_{dış}$$

$$\lambda_{silindir} \cdot L = -\lambda L + q_{dış}$$

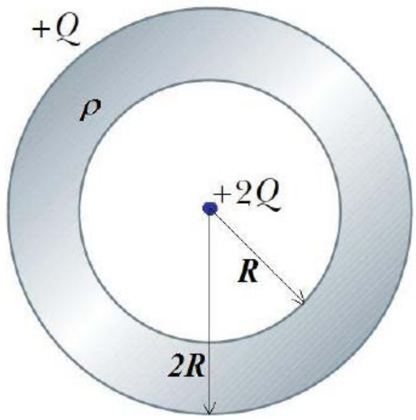
$$2\lambda L + \lambda L = q_{dış}$$

$$\boxed{q_{dış} = 3\lambda L}$$

6. Hacimsel yük yoğunluğu ρ ve toplam yükü +Q olan içi boş yalıtkan bir kürenin merkezinde +2Q yüklü noktasal bir yük vardır.

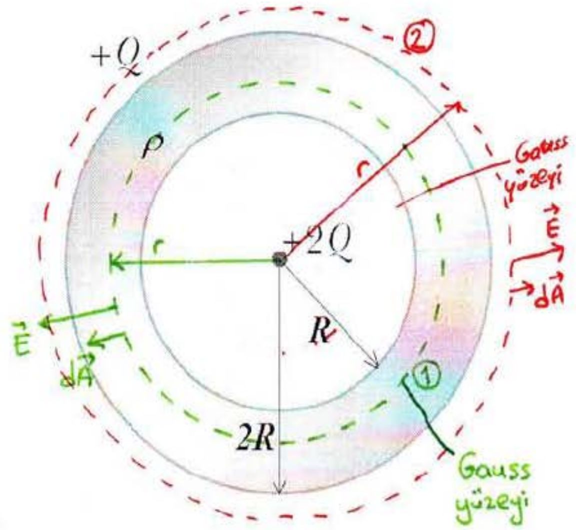
a) R<r<2R ve r>2R bölgelerinde elektrik alan şiddetini *k, Q, r ve R* cinsinden bulunuz.

b) Aynı bölgeler için elektrik alan şiddetini, kürenin iletken olması halinde bulunuz.



Şekil 5

a) $$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0}$$



R < r < 2R için (① bölgesinde)

$$E(4\pi r^2) = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} = \frac{2Q + q_{küre}}{\epsilon_0}$$

$$q_{küre} = \frac{\frac{4}{3}\pi(r^3 - R^3).Q}{\frac{4}{3}\pi(7R^3)}$$

$$q_{küre} = \frac{Q}{7R^3}(r^3 - R^3)$$

$\frac{4}{3}\pi\left[(2R)^3 - R^3\right]$ hacimli küresel kabukta Q yükü bulunursa

$\frac{4}{3}\pi\left[r^3 - R^3\right]$ 〃 $q_{küre}$ yükü bulunur.

$$E(4\pi r^2) = \left[2Q + \frac{Q}{7R^3}(r^3 - R^3)\right]\cdot\frac{1}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\left[2Q + \frac{Q}{7R^3}(r^3 - R^3)\right]$$

$$E = k\left(\frac{2Q}{r^2} + \frac{Qr}{7R^3} - \frac{Q}{7r^2}\right)$$

$$\boxed{E = \frac{kQ}{7}\left(\frac{13}{r^2} + \frac{r}{R^3}\right)}$$

r > 2R için (② bölgesinde)

$$E(4\pi r^2) = \frac{2Q + Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Q}{r^2}, \quad \boxed{E = 3k\frac{Q}{r^2}}$$

b) $R < r < 2R$ için (① bölgesinde)

İletken içinde $E = 0$; $q_{iç} = (q_{iç})_{yüzey} + 2Q$

$$q_{iç} = -2Q + 2Q = 0$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} = 0$$

$$\boxed{E = 0}$$

$r > 2R$ için (② bölgesinde)

$$E(4\pi r^2) = \frac{2Q + Q}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = 3k\frac{Q}{r^2}}$$

7. İç yarıçapı **2R**, dış yarıçapı **3R** olan iletken küresel bir kabuğun toplam yükü **+4Q**'dır. Küresel kabukla aynı merkezli, yarıçapı **R** olan yalıtkan bir kürenin toplam yükü **+2Q**'dır. Yalıtkan kürenin yük yoğunluğu düzgün olmayıp $\rho = \alpha r$ bağıntısına göre değişmektedir. Burada α, pozitif bir sabit ve r ise orijinden olan radyal uzaklıktır.

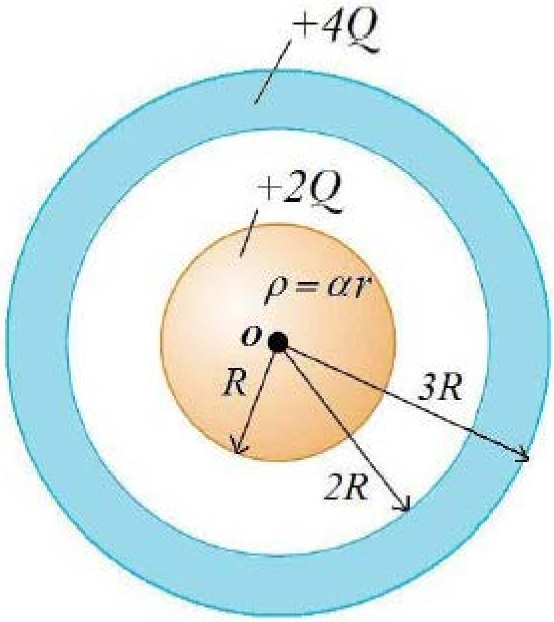
a) α sabitini Q ve R cinsinden bulunuz.

b) r<R

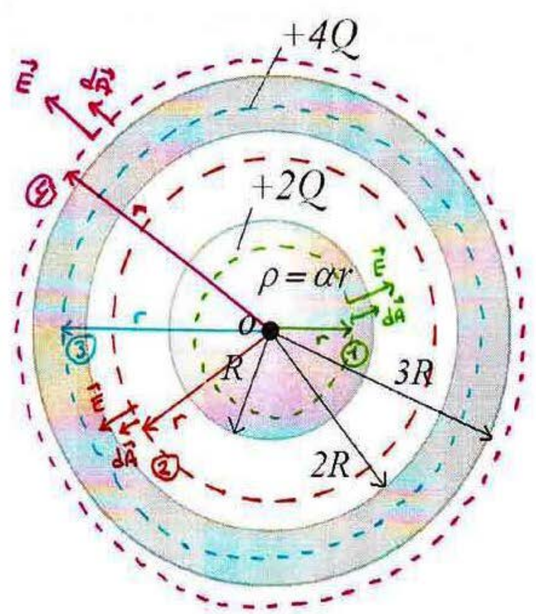
c) R<r<2R

d) 2R<r< 3R

e) r>3R bölgelerindeki elektrik alan şiddetini k, Q, r ve R cinsinden bulunuz.



Şekil 6



a)

$$dQ = \rho\, dV \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\int_0^{2Q} dQ = \int_0^{R} (\alpha r) 4\pi r^2 dr \qquad dV = 4\pi r^2 dr$$

$$Q\Big]_0^{2Q} = 4\pi\alpha \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$2Q = \pi \alpha R^4$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2Q}{\pi R^4}}$$

b)

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} \qquad q_{iç} = \int \rho\, dV$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r (\alpha r) 4\pi r^2 dr$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi\alpha \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^r$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{4\pi}{r^2}\,\frac{2Q}{\pi R^4}\cdot\frac{r^4}{4}\,, \qquad \boxed{E = 2k\frac{Qr^2}{R^4}} \quad r<R$$

c) $E(4\pi r^2) = \dfrac{2Q}{\epsilon_0}$

$E = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2Q}{r^2}$, $\boxed{E = 2k\dfrac{Q}{r^2}}$ $R < r < 2R$

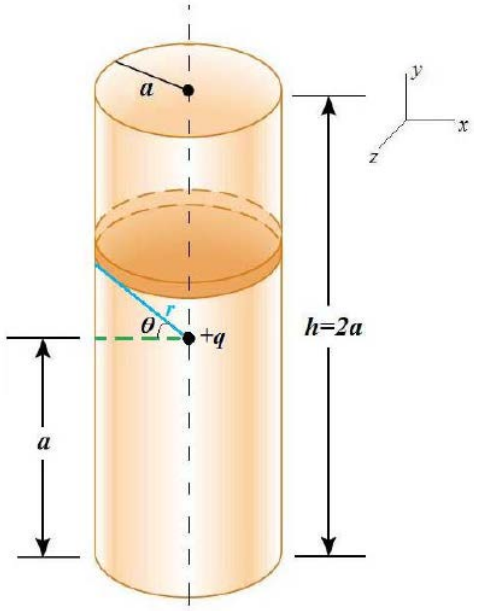
d) $E(4\pi r^2) = \dfrac{2Q - 2Q}{\epsilon_0}$ $q_{iç} = 2Q + \underbrace{(q_{iç})_{yüzey}}_{-2Q}$

$\boxed{E = 0}$ $2R < r < 3R$

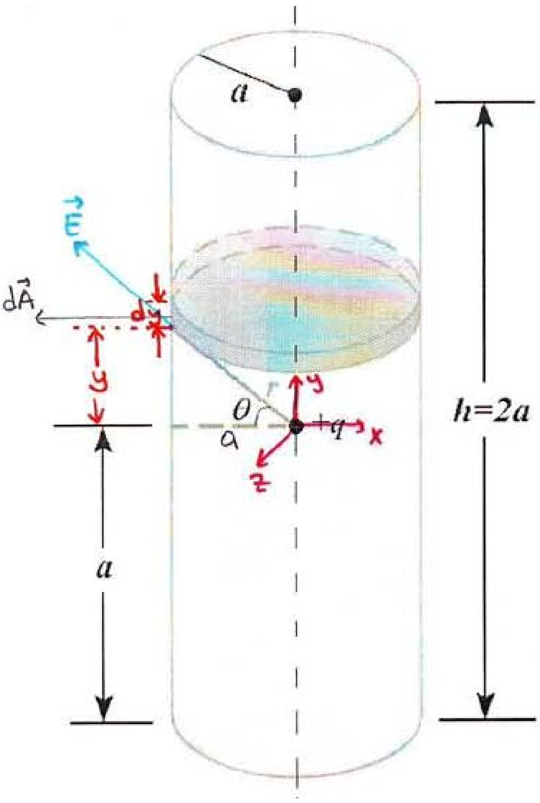
e) $E(4\pi r^2) = \dfrac{4Q + 2Q}{\epsilon_0}$

$\boxed{E = 6k\dfrac{Q}{r^2}}$ $r > 3R$

8. **Şekil 7**'deki gibi yarıçapı a ve yüksekliği 2h olan bir silindirin merkezinde bir q nokta yükü bulunmaktadır. Silindirin yanal yüzeyinden geçen elektrik akısının $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{q}{\varepsilon_0}$ bağıntısı ile verildiğini gösteriniz.



Şekil 7



$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{A} \qquad \vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$\Phi_E = \oint E.dA.\cos\theta$$

$$dA = 2\pi a\, dy$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{\cos\theta}$$

$$tg\theta = \frac{y}{a} \Rightarrow y = a.tg\theta$$

$$dy = a\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\Phi_E = \int k\frac{q}{r^2}dA\cos\theta = \int k\frac{q}{r^2}2\pi a dy\frac{a}{r}$$

$$\Phi_E = 2\pi a^2 kq\int_{-a}^{a}\frac{dy}{r^3} = 2\pi a^2 kq\int_{-a}^{a}\frac{dy}{\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^3}$$

$$\Phi_E = 2\pi a^2 kq \int \frac{\cos^3\theta \; a\sec^2\theta \, d\theta}{a^3}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Phi_E = 2\pi kq \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta \, d\theta$$

integral sınırları:

$y=-a$; $y = a\,tg\theta$

$-a = a\,tg\theta$

$tg\theta = -1$

$\theta = -\pi/4$

$y = a$; $y = a\,tg\theta$

$a = a\,tg\theta$

$tg\theta = 1$

$\theta = \pi/4$

$$\Phi_E = 2\pi kq \sin\theta \Big]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$\Phi_E = 2\pi kq \left[\sin\frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\Phi_E = 2\pi kq \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right]$$

$$\Phi_E = 2\pi kq\sqrt{2}$$

$$\Phi_E = 2\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\sqrt{2}$$

$$\boxed{\Phi_E = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{q}{\epsilon_0}}$$